Développement : Calcul des $\zeta(2k)$

RM

2022-2023

Références

1. Oraux X-ENS analyse tome 2 page 309

Énoncé :

Soit $\zeta : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\setminus\{0;1\} & \to & \mathbb{R} \\ k & \mapsto & \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^k} \end{array}$ la fonction zêta de Riemann définie sur les entiers naturels.
Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*, \zeta(2k) = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}b_{2k}$, ou $(b_n)_{n\geq 0}$ sont les nombres de bernouilli définie ci dessous.

Énoncé du livre/plan :
On définit φ la fonction 2π-périodique définie par $\varphi(x) = exp(\frac{zx}{2\pi})$ pour $x \in]-\pi,\pi]$, où $z \in \mathbb{C}\setminus 2i\pi\mathbb{Z}$.
De plus on pose la fonction $f : z \mapsto \frac{z}{e^z-1}$ aussi définie sur $\mathbb{C}\setminus 2i\pi\mathbb{Z}$.
Enfin, on définit les nombres de Bernouilli par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}z^n$ sous réserve que f est développable en série entière.

1. On va d'abords utiliser la transformé de Fourrier de φ pour en déduire le DSE de f en 0.

2. on va ensuite relier f au nombre de Bernouilli définie comme précédemment.

Résolution :

1. La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On peut alors calculer ses coefficients de Fourrier. On obtient, pour $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\begin{aligned} c_n(\varphi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\frac{zx}{2\pi}}e^{-inx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\frac{z}{2\pi}-ni}\left[e^{\frac{zx}{2\pi}}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n(e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}})}{z-2i\pi n} \end{aligned}$$

La fonction φ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Le théorème de Dirichlet permet d'affirmer que sa série de Fourier converge en tout point de x de $\mathbb{R}$ vers $\frac{1}{2}(\varphi(x+0)+\varphi(x-0))$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{2}(\varphi(x+0)+\varphi(x-0)) = (e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}})\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n e^{inx}}{z-2i\pi n}$$

Appliquons cette formule pour $x = \pi$.Alors $\frac{1}{2}(\varphi(x+0)+\varphi(x-0)) = \frac{1}{2}(e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}})$ et comme $e^{in\pi} = (-1)^n$, on obtient

$$\frac{1}{2}(e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}) = (e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}})\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{z-2i\pi n} = (e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}})\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{z+2i\pi n}{z^2+4\pi^2n^2}$$

en multipliant par le conjugué.
En divisant par $e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}$ et en regroupant les termes correspondant à deux valeurs opposées de n et en sortant le terme $n = 0$, l'égalité devient

$$\frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{2(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}})} = \frac{1}{z} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$$

On transforme le premier membre. Pour cela, on a

$$\frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{2(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}})} = \frac{e^z + 1}{2(e^z - 1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(e^z - 1)}$$

En multipliant notre égalité par z et en soustrayant $\frac{z}{2}$, on obtient finalement, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$

$$f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2}$$

Il faut donc trouver le développement en série entière de cette somme. Développons $\frac{z^2}{z^2+4\pi^2 n^2}$.
On a, pour $|z| < 2\pi$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $|\frac{z}{2\pi n}| < 1$ et donc

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{z^2 + 4\pi^2 n^2} &= \frac{z^2}{4\pi^2 n^2} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{4\pi^2 n^2}} = \frac{z^2}{4\pi^2 n^2} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(4\pi^2 n^2)^k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2(k+1)}}{(4\pi^2 n^2)^{k+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}} \end{aligned}$$

On pose alors $u_{n,k} = (-1)^{k-1} \frac{z^{2k}}{(2\pi n)^{2k}}$ pour $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. L'idée est alors de pouvoir inverser les sommes doubles dans le calcul. Pour cela on va montrer que $\sum_{k\geq 1} |u_{n,k}|$ converge et $\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} |u_{n,k}|$ aussi ce qui assurera fubini tonelli pour inverser les sommes.

$$\sum_{k\geq 1} |u_{n,k}| = \sum_{k\geq 1} \frac{|z|^{2k}}{(2\pi n)^{2k}} = \frac{|z|^2}{4\pi^2 n^2} \frac{1}{1 - \frac{|z|^2}{4\pi^2 n^2}} = \frac{|z|^2}{4\pi^2 n^2 - |z|^2}$$

Or $\frac{|z|^2}{4\pi^2 n^2 - |z|^2} < \frac{4\pi^2}{4\pi^2 n^2 - 4\pi^2} = \frac{1}{n^2 - 1}$ qui est donc intégrable par critère de riemann.
Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{|z|^2}{4\pi^2 n^2 - |z|^2}$ converge également. On peut alors échanger les sommes.
Pour $|z| < 2\pi, z \neq 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{k\in\mathbb{N}^*} u_{n,k} = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_{n,k} \\ &= 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2k}}\right) z^{2k} \end{aligned}$$

Remarquons que f admet un prolongement par continuité en 0 avec $f(0) = 1$ et que l'égalité est vérifié pour $z = 0$.

> En effet car $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\frac{e^z - 1}{z}} = \frac{1}{exp(0)} = 1$

On obtient donc, pour $|z| < 2\pi$,

$$\boxed{f(z) = 1 - \frac{z}{2} + 2\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2k}}\right) z^{2k}}$$

C'est bien le DSE cherché. Le rayon est bien car f non défini en $2i\pi$.

2. Les nombres de Bernouilli b_n sont définis par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$.
On alors d'après la formule de $f(z)$ précédent, par unicité des coefficients du DSE que $b_0 = 1$,$b_1 = -\frac{1}{2}$ et $b_{2n+1} = 0$ pour $n \geq 1$. En multipliant ensuite $f(z)$ par $e^z - 1$ on a

$$\begin{aligned} f(z)(e^z - 1) = z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} z^k \frac{z^{n-k}}{(n-k)!} \quad \text{Produit de Cauchy} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k z^n}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients du DSE , on a pour $n \geq 2$ que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!(n-k)!} = 0$.
En multipliant par $n!$, on obtient que $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$.
On a donc que

$$b_{n-1} = -\frac{1}{\binom{n}{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} b_k = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} b_k$$

Par récurrence immédiate, on a que $b_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$.
On calcule par exemple $b_2 = \frac{1}{6}$ et $b_4 = -\frac{1}{30}$.
Enfin, en utilisant le DSE précédent pour $k \geq 1$, on a $\frac{b_{2k}}{(2k)!} = 2\frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2k}}\right)$ et on a finalement

$$\boxed{\left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2k}}\right) = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} b_{2k}}$$

Cela nous permet de retrouver les résultats connus de $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

> On ne sait par contre pas grand chose de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$ si k est impair. L'un des seuls résultats significatifs connus est que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ est irrationnel (démontré par Apéry en 1978)